4. CAMBIO DE VARIABLES:

4.1. Para integrales dobles:

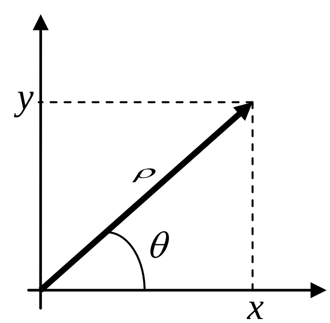
Sea $\bar{r}: T \to D \,/\, \bar{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j}$ una función que cumple con las siguientes condiciones:

i) Es continua en T
ii) Es biyectiva tal que sus inversas $u(x,y) \wedge v(x,y)$ son continuas y con derivadas continuas en D,
iii) La frontera de D sea la imagen de la frontera de T
iv) $\bar{r}_u$ y $\bar{r}_v$ continuas en T

Entonces:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(x(u,v);y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

siendo $|J(u,v)| = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ el Jacobiano.



<u>Caso particular:</u>

Coordenadas polares

Sea $\bar{r}: T \to D \,/\, \bar{r}(\rho,\theta) = x(\rho,\theta)\vec{i} + y(\rho,\theta)\vec{j}$ tal que

$$\begin{cases} x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \\ y(\rho,\theta) = \rho\,sen\,\theta \end{cases}$$

Actividades:

a) Determinar el Jacobiano.
b) Calcular el área de un círculo centrado en el origen de radio unitario.
c) Calcular el momento de inercia polar de una placa de chapa homogénea limitada por las rectas $y=0$, $y=x$, y la circunferencia $x^2+y^2=4$.

4.2 Para integrales triples:

Sea $\bar{r}: T \to D \,/\, \bar{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\vec{i} + y(u,v,w)\vec{j} + z(u,v,w)\vec{k}$ una función que cumple con las siguientes condiciones:

i) Es continua en T
ii) Es biyectiva tal que sus inversas $u(x,y,z) \wedge v(x,y,z) \wedge w(x,y,z)$ son continuas y con derivadas continuas en D

iii) La frontera de D sea la imagen de la frontera de T

iv) $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ y $\bar{r}_w$ continuas en T

Entonces:

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_T f(x(u,v,w); y(u,v,w); z(u,v,w))\, |J(u,v,w)|\, du\ dv\ dw$$

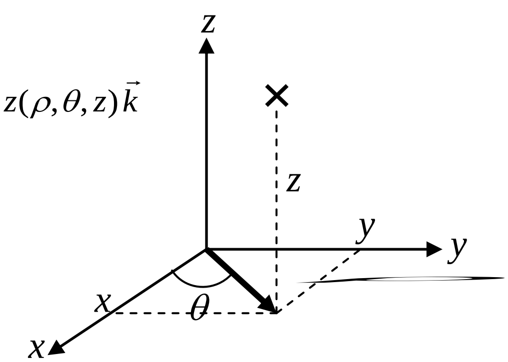
$$\text{tal que } \ |J(u,v,w)| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \quad \text{Jacobiano}$$

<u>Casos particulares</u>:

A) Coordenadas cilíndricas:

Sea $\bar{r}: T \to D \,/\, \bar{r}(\rho,\theta,z) = x(\rho,\theta,z)\vec{i} + y(\rho,\theta,z)\vec{j} + z(\rho,\theta,z)\vec{k}$

$$\text{tal que } \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho\ sen\,\theta \\ z = z \end{cases}$$



Actividades

a) Determinar el Jacobiano.

b) Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $S_1: \ 4 - z = x^2 + y^2$; $S_2: \ z = 0$

c) Calcular el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

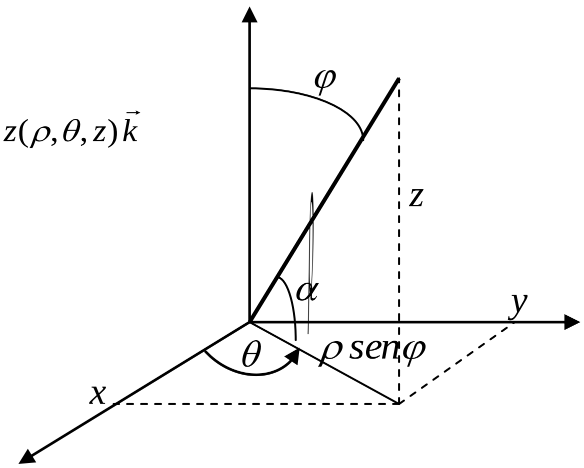
d) Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ y la superficie cilíndrica $z = 4 - y^2$.

e) Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $z = 0$; $2z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 4$.

f) Calcular el momento de inercia respecto al eje z del sólido homogéneo limitado por las superficies $x^2 + y^2 = a^2$, $z = x + a$ y $z = 0$.

g) Determinar las coordenadas del centro geométrico del volumen interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, al paraboloide $z = x^2 + y^2$ y al plano $z = 0$.

B) Coordenadas esféricas:



Sea

$\bar{r}: T \to D \,/\, \bar{r}(\rho,\theta,z) = x(\rho,\theta,z)\vec{i} + y(\rho,\theta,z)\vec{j} + z(\rho,\theta,z)\vec{k}$

$$\text{tal que } \begin{cases} x = \rho \cos\theta\ sen\,\varphi \\ y = \rho\ sen\,\theta\ sen\,\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

Actividades:

a) Determinar el Jacobiano
b) Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para las superficies representadas por las ecuaciones en coordenadas rectangulares siguientes:

$$S_1: \ x^2 + y^2 = z^2 \qquad S_2: \ x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

c) Hallar el volumen de la región sólida V limitada inferiormente por S_1 y superiormente por S_2.

Bibliografía sugerida:
Cambio de variable. *LARSON- HOSTETLER- EDWARD (1995): "Cálculo y Geometría analítica", tomo 2, quinta edición, autores, pág. 1103 a 1109, 1131 a 1041.*